ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ (ΠΡΩΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ Η ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΟΥΣ)

1) Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι πρώτοι;

101, 103, 107, 111, 113, 121

ΛΥΣΗ

Είναι $10 < \sqrt{101} < 11$.

Επομένως, για να είναι ο 101 πρώτος, αρκεί να μην έχει θετικό πρώτο διαιρέτη μικρότερο του 11. Αφού, καθένας από τους πρώτους 3, 5, 7 που είναι μικρότεροι του 11, δεν διαιρεί τον 101, ο 101 πρώτος.

Αν εργαστούμε με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι οι αριθμοί:

103, 107 και 113 είναι πρώτοι, ενώ οι 111 και 121 σύνθετοι.

2) Να βρείτε το μικρότερο φυσικό αριθμό α, για τον οποίο οι αριθμοί:

(i) $\alpha, \alpha+1, \alpha+2$ είναι όλοι σύνθετοι.

(ii) $\alpha, \alpha+1, \alpha+2, \alpha+3$ είναι όλοι σύνθετοι

ΛΥΣΗ

Από το Κόσκινο του Ερατοσθένη βρίσκουμε ότι:

(i) $\alpha=8$, αφού οι αριθμοί 8, 9, 10 είναι οι πρώτοι σύνθετοι στη σειρά (διαδοχικοί) αριθμοί

(ii) $\alpha=24$, αφού οι αριθμοί 24, 25, 26, 27 είναι οι τέσσερις σύνθετοι στη σειρά (διαδοχικοί) αριθμοί

3) Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ και τον πρώτο $p>3$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=3$, (ii) $\alpha^2-4=p$, (iii) $(\alpha^2-1)p=15$

ΛΥΣΗ

(i) Γενικά $\alpha+\beta>\alpha-\beta$, ενώ παράλληλα έχουμε:

$$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=3 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta=1 \\ \alpha+\beta=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha=4 \\ 2\beta=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=1 \end{cases}$$

(ii) $a^2-4=(a-2)(a+2) \rightsquigarrow$ Αφού $(a+2)>(a-2)$, και

$$a^2-4=p \iff (a-2)(a+2)=p \iff \begin{cases} a-2=1 \\ a+2=p \end{cases} \iff \begin{cases} a=3 \\ p=5 \end{cases}$$

(iii) Έχουμε, $a^2-1=(a-1)(a+1)$

Αλλά $a-1<a+1$ και $p>3$ τότε

$$(a^2-1)\cdot p=15 \iff (a-1)(a+1)\,p=1\cdot 3\cdot 5 \iff \begin{cases} a-1=1 \\ a+1=3 \\ p=5 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2 \\ p=5 \end{cases}$$

4) ΝΔΟ ο μοναδικός θετικός πρώτος (p) για τον οποίο ισχύει $3p+1=v^2$ όπου $v\in\mathbb{N}^*$, είναι ο $p=5$ και ρ=1

ΛΥΣΗ

$$3p+1=v^2 \iff 3p=v^2-1 \iff 3p=(v-1)(v+1) \iff$$

$$\iff \begin{cases} v-1=3 \\ v+1=p \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} v+1=3 \\ v-1=p \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} v=4 \\ p=5 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} v=2 \\ p=1 \end{cases}$$ ~~Αδύνατο~~.

Δεκτόν

Δεκτόν

5) ΝΔΟ ο μοναδικός θετικός πρώτος p που μπορεί να πάρει τη μορφή $p=v^3-1$, $\forall v\in\mathbb{N}^*$ είναι ο $p=7$, ενώ τη μορφή $p=v^3+1$, $\forall v\in\mathbb{N}^*$ είναι ο $p=2$.

ΛΥΣΗ

• $v^3-1=p \iff (v-1)(v^2+v+1)=p \iff \begin{cases} v-1=1 \\ v^2+v+1=p \end{cases}$ αφού $v^2+v+1>1$

$\iff \begin{cases} v=2 \\ p=7 \end{cases}$

• $v^3+1=p \iff (v+1)(v^2-v+1)=p \iff \begin{cases} v+1=p \\ v^2-v+1=1 \end{cases}$ αφού $v+1>1$

$\iff \begin{cases} v+1=p \\ v^2-v=0 \end{cases} \iff \begin{cases} p=2 \\ v=1 \end{cases}$.

6) Αν α, β είναι δύο περιττοί θετικοί ακέραιοι μεγαλύτεροι του 1 νδο ο αριθμός $\alpha^2+\beta^2 \in \mathbb{Z}$ είναι σύνθετος

ΛΥΣΗ

α, β περιττοί $\Leftrightarrow$ $\alpha = 2k+1$ και $\beta = 2\lambda+1$, $\forall k, \lambda \in \mathbb{Z}$

Επομένως, $\alpha^2+\beta^2 = (2k+1)^2 + (2\lambda+1)^2 =$

$= 4k^2+4k+1 + 4\lambda^2+4\lambda+1 = 2\cdot(\underbrace{2k^2+2k+2\lambda^2+2\lambda+1}_{\mu \in \mathbb{Z}}) =$

$= 2\cdot\mu$, $\mu \in \mathbb{Z}$ και $\mu > 1$. Άρα, σύνθετος.

7) Έστω α, ν θετικοί ακέραιοι και p θετικός πρώτος. Εάν $p | \alpha^\nu$ νδο $p^\nu | \alpha^\nu$

ΛΥΣΗ

$p | \alpha^\nu \Rightarrow p | \alpha \Rightarrow \alpha = k\cdot p$, $k \in \mathbb{Z}$

Υψώνοντας στη ν, έχουμε:

$\alpha^\nu = k^\nu \cdot p^\nu$, $k \in \mathbb{Z}$ & $\nu \in \mathbb{N} \Rightarrow p^\nu | \alpha^\nu$.

8) Έστω $\alpha = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ η πρωτογενής μορφή του $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha > 0$. ΝΔΟ ο α είναι τετράγωνο ενός θετικού ακεραίου <u>αν.ν</u> οι εκθέτες $a_1, a_2, \ldots, a_k$ είναι άρτιοι.

ΛΥΣΗ

($\Leftarrow$): Οι εκθέτες είναι άρτιοι

Επομένως, $a_1 = 2\beta_1$, $a_2 = 2\beta_2$, ..., $a_k = 2\beta_k$, όπου $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in \mathbb{N}^*$

οπότε θα ισχύει: $\alpha = p_1^{2\beta_1} \cdot p_2^{2\beta_2} \cdots p_k^{2\beta_k} = (p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k})^2 = \underline{\beta^2}$

όπου $\beta = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$, $\beta \in \mathbb{N}^*$

($\Rightarrow$): Έστω $\alpha = \beta^2$, $\beta \in \mathbb{N}^*$. Τότε κάθε θετικός πρώτος διαιρέτης του β είναι και διαιρέτης του α. Επομένως,

$\beta = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$. Άρα, η παραπάνω ισότητα είναι:

$\alpha = (p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k})^2 = p_1^{2\beta_1} \cdot p_2^{2\beta_2} \cdots p_k^{2\beta_k}$

όπου οι εκθέτες είναι άρτιοι.

9) ΝΔΟ οι ακέραιοι της μορφής ν^4+4, ν: θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1, και οι ακέραιοι της μορφής $8^\nu+1$ ν: θετικός ακέραιος είναι σύνθετοι αριθμοί

ΛΥΣΗ

• $\nu^4+4=(\nu^4+4\nu^2+4)-4\nu^2=(\nu^2+2)^2-(2\nu)^2=(\nu^2+2-2\nu)(\nu^2+2+2\nu)=$

$=[\underbrace{(\nu-1)^2+1}_{>1}]\cdot[\underbrace{(\nu+1)^2+1}_{>1}]$. Άρα, ο ν^4+1 σύνθετος

• $8^\nu+1=(2^\nu)^3+1^\nu=(2^\nu+1)\cdot(2^{2\nu}-2^\nu+1)$

Άρα, $8^\nu+1=(2^\nu+1)\cdot(2^{2\nu}-2^\nu+1)$

όμως, $1<2^\nu+1<8^\nu+1$. Άρα, ο $8^\nu+1$ σύνθετος

10) Εάν $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^*$ με $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{43}{34}$, νδο αριθμός $\alpha+\beta$ σύνθετος

ΛΥΣΗ

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{43}{34}\Rightarrow \alpha\cdot34=\beta\cdot43\Rightarrow 34\,|\,43\beta$ και λόγω ότι $(34,43)=1$

Θα ισχύει $34|\beta$. Άρα, $\exists k\in\mathbb{N}^*$ ώστε:

$\beta=34\cdot k$ άρα $\alpha\cdot\cancel{34}=\cancel{34}\cdot k\cdot43\Rightarrow \alpha=43\cdot k$

Επομένως, $\alpha=43k$ και $\beta=3k4$, $k\in\mathbb{N}^*$

οπότε $\alpha+\beta=43k+34k=77k=7\cdot11\cdot k$. ← σύνθετος

11) ΝΔΟ ο μοναδικός θετικός πρώτος p για τον οποίον οι αριθμοί $p, p+2, p+4$ είναι και οι τρείς πρώτοι είναι ο $p=3$.

ΛΥΣΗ

Έστω p θετικός πρώτος

$p=3k$ ή $p=3k+1$ ή $p=3k+2$, $k\in\mathbb{N}^*$

- Αν $p=3k$, $k\in\mathbb{N}^*$. Λόγω ότι ο p πρώτος τότε αναγκαστικά $p=3$ και $k=1$ και άρα $p+2=3+2=5$ και $p+4=3+4=7$
- Αν $p=3k+1$, $k\in\mathbb{N}^*$ τότε $p+2=3k+3=3(k+1)$ σύνθετος
 Άρα, οι αριθμοί $p, p+2, p+4$ όχι πρώτοι
- Αν $p=3k+2$, $k\in\mathbb{N}^*$ τότε $p+4=3k+6=3(k+2)$ σύνθετος

Άρα, ο μοναδικός θετικός πρώτος είναι ο $p=3$

12) Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $x^3+x^2+x-3=0$ και (ii) $x^2+x+p=112$, p: πρώτος >0

ΛΥΣΗ

(i) α' τρόπος: μέσω Horner

β' τρόπος: Πιθανές θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης είναι οι θετικοί διαιρέτες του 3, δηλαδή οι αριθμοί 1 & 3. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $x=1$

(ii) $x^2+x+p=112 \Leftrightarrow p=112-\underbrace{x(x+1)}_{\text{άρτιος}}$, p: άρτιος

οπότε θα είναι $p=2$ όπως ο μοναδικός άρτιος πρώτος

Έτσι, $x^2+x+2=112 \Leftrightarrow x^2+x-110=0 \Leftrightarrow \underset{\text{δεκτή}}{x=10}$ ή $\underset{\text{απορ.}}{x=-11}$

13) Έστω $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^*$. Αν $\beta^2 | \alpha^2$ τότε νδο $\beta | \alpha$

ΛΥΣΗ

Αν $p_1, p_2, \ldots, p_k$ οι κοινοί και μη κοινοί θετικοί πρώτοι παράγοντες των α και β, τότε θα ισχύει:

$$\alpha = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \quad \text{και} \quad \beta = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} \quad (0)$$

όπου $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in \mathbb{N}$

$$\alpha^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \cdots p_n^{2\alpha_k} \quad \text{και} \quad \beta^2 = p_1^{2\beta_1} \cdot p_2^{2\beta_2} \cdots p_k^{2\beta_k} \quad (1)$$

Επειδή, $\beta^2 | \alpha^2$ λόγω της (1) ισχύει:

$$2\beta_1 \leq 2\alpha_1, \ldots, 2\beta_k \leq 2\alpha_k$$

$$\beta_1 \leq \alpha_1, \ldots, \beta_k \leq \alpha_k$$

άρα από τη (0) έχουμε $\beta | \alpha$.